

## Modelo analítico para la optimización de cilindros de materiales compuestos sometidos a compresión.

Agustín Richard, Gastón Bonet

Departamento de Aeronáutica - Universidad Nacional de La Plata

116 S/N e 47 y 48 - La Plata - Buenos Aires - Argentina

U.I.D G.E.M.A - Facultad de Ingeniería - UNLP

Email: agustinrichard86@gmail.com / gaston.bonet@ing.unlp.edu.ar

### RESUMEN

*El siguiente informe presenta el análisis estructural y diseño de una programación analítica para la optimización de cilindros de materiales compuestos sometidos a cargas de compresión.*

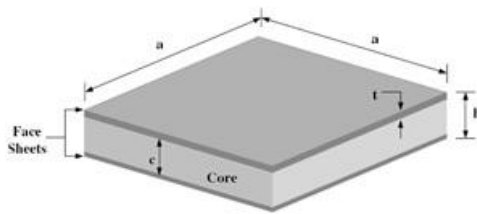
**Palabras clave:** (materiales compuestos, cilindros, optimización, estabilidad, crimping, arrugamiento, sándwich)

### INTRODUCCIÓN

El diseño avanzado de estructuras de materiales compuestos tiene por objetivo obtener la más alta relación entre su resistencia y peso. Teniendo en cuenta la anisotropía de este tipo de materiales y la capacidad de diseño de sus propiedades, un óptimo arreglo en la orientación de las láminas conduce a la reducción del peso de la estructura. Dentro del campo de estudio en el cual nos concentramos en este documento se encuentra la estabilidad de cilindros. Como se verá obtenemos en principio una solución analítica a los fenómenos de estabilidad para luego realizar un modelo de optimización con herramientas de cálculo que nos permitan obtener resultados de optimización en tiempos breves.

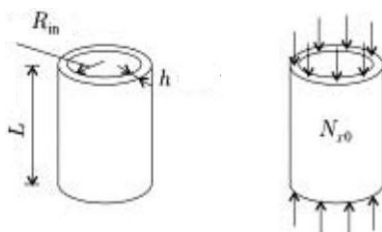
### LAMINADOS SANDWICH Y ESTABILIDAD DE PLACAS CILINDRICAS

Un laminado sándwich consiste esencialmente en dos hojas de alta resistencia (facesheets) separados por un núcleo de bajo peso y resistencia. El objetivo es obtener un incremento en la rigidez a flexión ( $D_{ij}$ ) con un aumento de peso muchas veces insignificante y de esta forma estabilizar la estructura que se encuentra sometida a cargas de pandeo dominantes. Como contrapartida y debido a



**Figura 1.** Laminado sándwich de dimensiones  $a$ ,  $c$ ,  $t$  y  $h$ .

la baja rigidez del núcleo las tensiones de corte transversal toman relevancia y aparecen asociados modos de falla que debemos tener en cuenta a la hora de proponer una solución analítica. En consecuencia debemos trabajar sobre un modelo que nos permita estimar las cargas críticas de pandeo de placas cilíndricas bajo la consideración de las tensiones de corte transversal. Entonces; basándonos teorías ya desarrolladas <sup>[1]-[2]</sup> : dado un cilindro de radio  $R$  y longitud  $L$  sometido a un estado de compresión pura, la carga crítica de pandeo queda definida por la siguiente ecuación:



**Figura 2.** Cilindro de radio  $R$ , longitud  $L$  y espesor  $h$ , sometido a un estado de compresión pura.

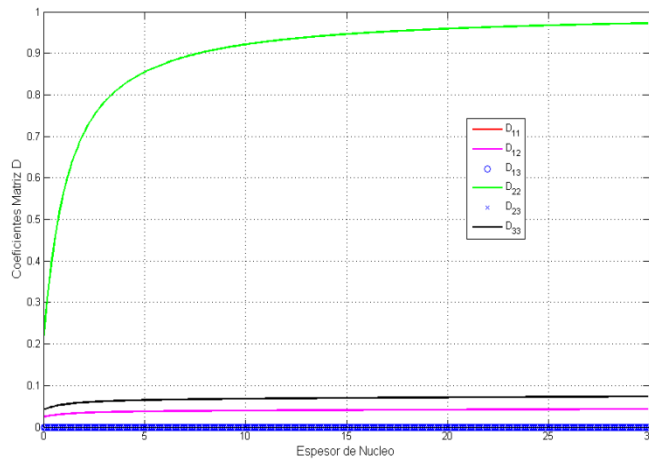
$$\lambda_{\text{critico}} = \frac{1}{N_x \alpha^2 + N_y \beta^2} \frac{\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{14} & F_{24} & F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{15} & F_{25} & F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix}}$$

Esta solución propuesta en la bibliografía citada <sup>[1][2]</sup> se define al de establecer el equilibrio entre la energía acumulada por deformación;

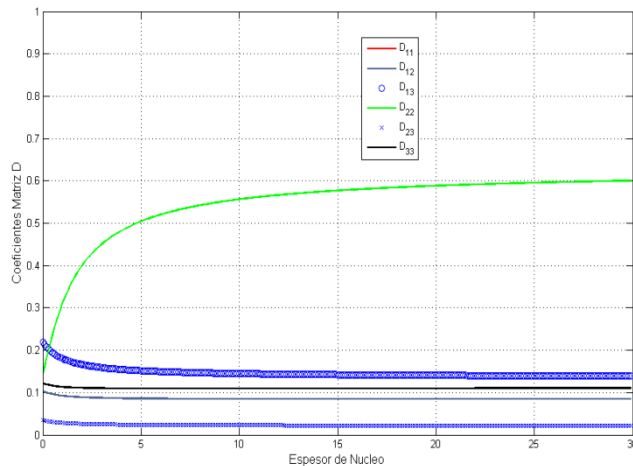
$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x} \right)^2 D_{11} + \left( \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y} \right)^2 D_{22} + 2 \frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x} \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y} D_{12} + \left( \frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y} \right)^2 D_{66} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - \chi_{xz} \right)^2 S_{11} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - \chi_{yz} \right)^2 S_{22} \right] dy dx$$

Y el trabajo de las fuerzas externas;

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ N_x \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$



**Figura 3. Variación de los coeficientes de la matriz rigidez D para un laminado orto trópico, simétrico balanceado y con espesor de núcleo de 0 a 30 mm.**



**Figura 4. Variación de los coeficientes de la matriz rigidez D para un laminado anisótropo, simétrico, no balanceado y con espesor de núcleo de 0 a 30 mm.**

al alterar el orden de laminado puede ser considerado despreciable a los efectos de simplificar el desarrollo de la programación. No obstante proponemos resolver una matriz rigidez respetando un orden de laminado establecido con anticipación, fijo, y considerando como distancia al eje central a la distancia media de todo el espesor de láminas que comparten orientación.

Respecto a los términos considerados de la matriz rigidez [D]: Cómo se muestra en las figura 3 y 4, para el caso de laminados sándwich simétricos y balanceados la magnitud de los coeficientes  $D_{16}$  y  $D_{26}$  se vuelve despreciable en la medida en la que el espesor del núcleo crece. Esto nos permite independizarnos de los mismos en la ecuación de energía acumulada por deformación. No así para el caso de laminados no balanceados donde como puede verse en la figura 4 los términos de acoplamiento de flexo torsión se mantienen comparables en magnitud con el resto de los términos de la matriz [D]. De esta forma limitamos el modelo analítico a cilindros de laminados simétricos y balanceados.

En cuanto a la secuencia de laminado: Conocemos que los coeficientes de la matriz [D] son función de la distancia de cada lamina al centro del laminado. Esto hace que el valor de estos términos dependa del orden o secuencia de laminado. Respecto a esta condición podemos decir que: En laminados sándwich para los cuales contemplamos un espesor de núcleo notablemente mayor al espesor de los facing, el orden de magnitud de la variación de los coeficientes  $D_{ij}$

Este método de cálculo de matriz  $[D]$  no solo optimiza la programación del modelo de optimización si no que en principio nos permite alterar la secuencia del laminado al momento de trabajar con espesores de núcleo delgados o en laminados monolíticos donde el orden de laminado retoma importancia. Teniendo como única limitación mantener juntos los "paquetes" de orientaciones.

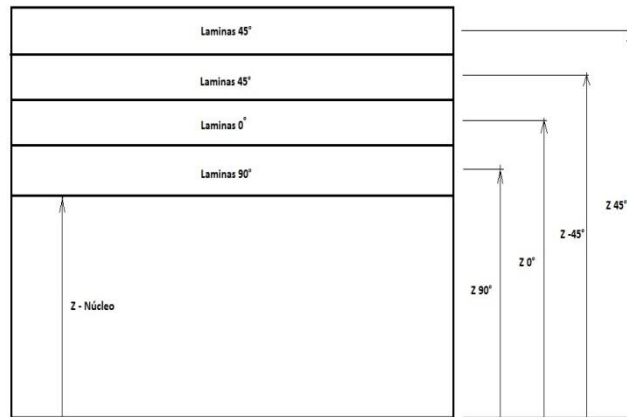


Figura 5. Orden de laminado pre establecido para el código de optimización.

$$[D] = \sum Q_K(t_k z_k^2 + \frac{t_k^3}{12})$$

Para finalizar y dada la hipótesis de bordes simplemente apoyados la deformada que satisface esta condición y que utilizamos para calcular el trabajo de las fuerzas externas viene dada por la ecuación:

$$\omega = \omega_1 \sin\left(\left(\frac{m\pi}{L}\right)(x + c_1 y)\right) \sin\left(\left(\frac{n}{R}\right)(x + c_2 x)\right) + \omega_2 \sin\left(\left(\frac{m\pi}{L}\right)(x + c_1 y)\right) \cos\left(\left(\frac{n}{R}\right)(x + c_2 x)\right)$$

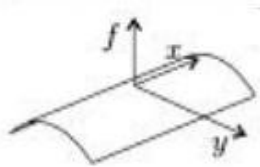


Figura 6. Patrón de forma de pandeo local.

Una particularidad de esta solución es que: la longitud mínima de onda (en estado de pos-pandeo) para la cual se evalúa la energía interna de deformación puede ser lo suficientemente pequeña como para representar, como se verá más adelante, un modo de falla especial y característico de los laminados sándwich como es el "crimping".

Donde  $m$  y  $n$  contienen información sobre el número máximo de ondas en la longitud y la circunferencia del cilindro respectivamente. Y para el caso de laminados ortotrópicos y cuasi-isótropos los coeficientes  $c_1 \approx c_2 \approx 0$ .

## ARRUGAMIENTO

Es un fenómeno de pandeo local donde las caras del sándwich pandean de modo tal que la deformación resulta en un arrugamiento en forma de media onda y que se extiende a lo largo o ancho de toda la estructura. Existe en tres formas: simétrico, anti-simétrico, y un modo mixto<sup>[3]</sup>.

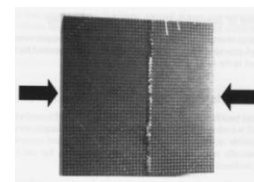
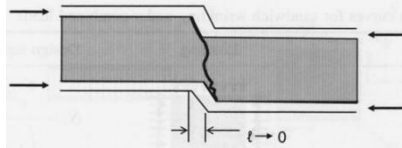


Figura 7. Arrugamiento en panel sándwich sometido a compresión pura.

## CRIMPING

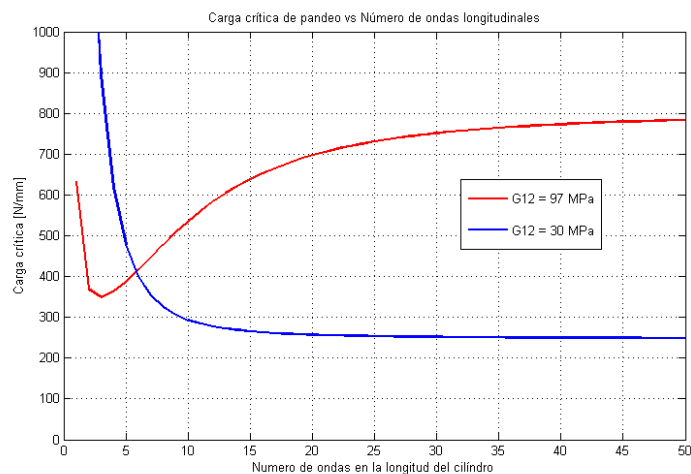
Es un modo de falla por tensiones de corte característico en laminados sándwich con núcleos de baja rigidez transversal. Aparece en estos casos un incremento de sensibilidad a excentricidades debido a discontinuidades en el núcleo o cambios abruptos en el espesor de las caras por acumulación de láminas de refuerzo. En su esencia es un modo particular de falla por arrugamiento anti-simétrico en el cual la longitud de la media-onda tiende a cero <sup>[4]</sup> :



**Figura 8. Crimping en placa sándwich sometida a compresión pura.**

Como se menciono anteriormente, en el modelo de estabilidad de cilindros laminados que utilizamos para calcular la carga crítica de pandeo están contempladas longitudes de onda lo suficientemente pequeñas como para modelar entre todas las deformadas la correspondiente al modo crimping. Si bien la magnitud o valor de la carga de pandeo no indica si el fenómeno predominante fue la estabilidad de placa o la falla por corte, podemos mediante una visualización grafica del numero de ondas resultantes en la longitud del cilindro, determinar qué modo ah sido dominante. Así es que por ejemplo; para dos cilindros de iguales dimensiones y laminados pero diferentes módulos de corte transversal en sus núcleos podemos obtener los siguientes resultados:

En la figura 10 podemos observar que (para un mismo laminado) cuando la rigidez transversal del núcleo baja lo suficiente, aparece una disminución asintótica de la carga de pandeo y un crecimiento indefinido del numero de ondas longitudinales ( $l \rightarrow 0$ ). Con lo que reconocemos entonces de esa forma a la falla por crimping. Para el caso contrario vemos un estado de carga mínimo y crítico para un número de ondas definido.



**Figura 10. Numero de ondas longitudinales para la carga crítica de pandeo en cilindros con núcleos de 30 y 97 MPa sometidos a compresión pura.**



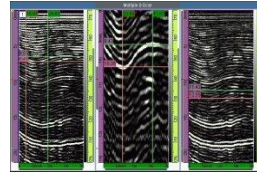
**Figura 9. Visualización gráfica para el cálculo de la carga crítica de pandeo en cilindros con núcleos de 30 MPa (derecha) 97 MPa (izquierda) e idénticos facing.**

## CORRECCION POR ONDULACIONES

Cuando se lleva a cabo el proceso de fabricación de laminados sándwich por infusión podrían aparecer en la geometría de una de las superficies del sándwich (normalmente la cara contra-molde) irregularidades u ondulaciones producto del herramental utilizado o de una distribución no uniforme de presiones de vacío. Del mismo modo, en la orientación de las laminas es común encontrar ondulaciones (tanto de orden macroscópico como microscópico) que pueden sensibilizar la estructura a fallas por arrugamiento <sup>[5]</sup>.



**Figura 10. Ondulaciones de orden microscópico.**



**Figura 11. Ondulaciones de orden macroscópico.**

Por estas razones y basados en resultados experimentales amonestamos las expresiones de cargas críticas por arrugamiento simétrico y anti simétrico aplicando factores de corrección de 0.47 y 0.5593 respectivamente.

## RESISTENCIA DE LAMINADO

Una vez considerados los fenómenos de estabilidad proponemos un criterio de rotura por resistencia de laminado. Para esto nos basamos en el criterio de Tsai-Hill donde para cada lámina debemos verificar el factor de seguridad <sup>[6]</sup> que resumimos en la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_1^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{F_2^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1^2} + \frac{\tau_6^2}{F_6^2} = 1$$



**Figura 12. Rotura por compresión.**

## CORRECCION POR SENSIBILIDAD A IMPERFECCIONES

Afectamos al resultado que obtenemos de la ecuación de estabilidad de placas cilíndricas con un factor de corrección por imperfecciones basado en ensayos sobre cilindros laminados <sup>[7]</sup>. Donde encontramos para cilindros un factor de corrección  $\gamma$  a partir de las siguientes expresiones:

$$\gamma = 1 - 0.901(1 - e^{-\varphi})$$

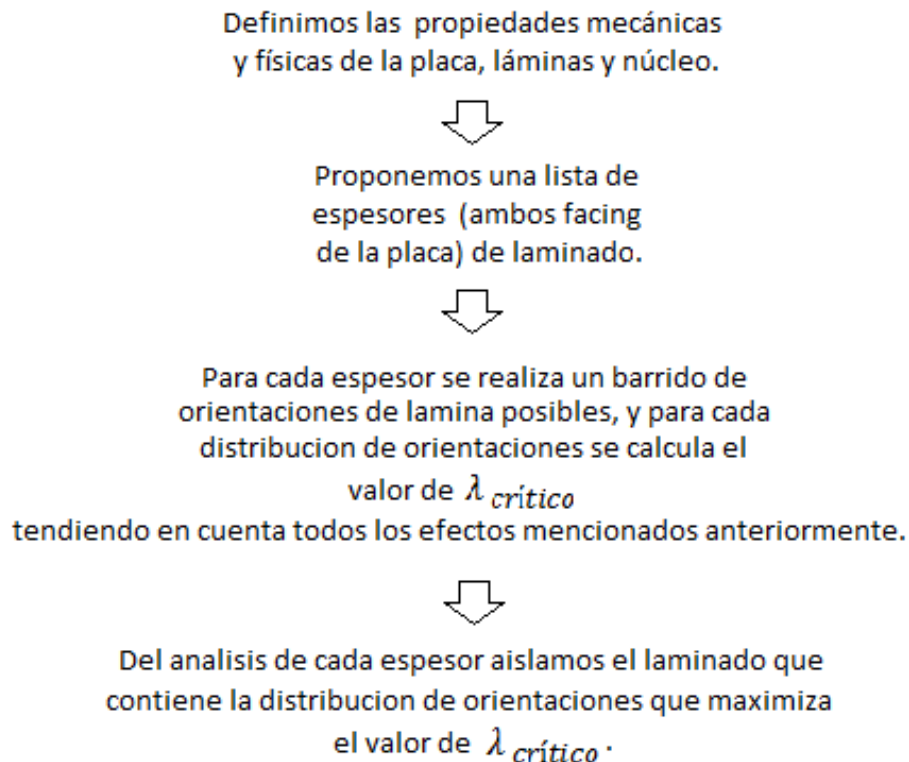
$$\varphi = \frac{1}{29.8} \sqrt{\frac{R}{\sqrt[4]{D_x D_y / E_x E_y}}}$$

## CODIGO DE OPTIMIZACION DE DISEÑO

Conocido el estado de carga de una estructura es posible utilizando la capacidad de diseño de las propiedades mecánicas, orientar el laminado para satisfacer exclusivamente las necesidades de resistencia y rigidez disminuyendo al mínimo posible su peso. Para este trabajo nos concentramos en un análisis para-métrico en el cual, impuesto un estado de carga realizamos un barrido de todas las posibilidades respecto la orientación y cantidad de laminas que componen a un espesor de laminado para así seleccionar la configuración optima que satisface y maximiza el estado de carga establecido. Dado que para un espesor de laminado existen un número infinito de posibilidades en lo que respecta a la orientación de las láminas que lo componen, limitamos este trabajo al estudio de laminados ortotrópicos y cuasi-isótropos en los que las orientaciones para las láminas son combinaciones de  $\pm 45^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $0^\circ$  respecto de los ejes materiales. Como herramienta de cálculo se utilizó el software

Matlab y la programación nos permite por medio de sub-rutinas calcular el valor del esfuerzo critico correspondiente a cada uno de los fenómenos mencionados anteriormente (estabilidad de placa, arrugamientos, rotura, y crimping) para luego apartar y almacenar el resultado que se corresponde con aquel que limita la magnitud del estado de carga, realizar luego nuevos cambios en la orientación de laminas dentro del mismo espesor pre-establecido y repetir el cálculo hasta obtener la secuencia de laminado (para dicho espesor) optima que maximice el estado de carga establecido. Este proceso se repite para una gama de espesores predeterminados para finalmente encontrar para cada espesor en particular el porcentaje y orientación de láminas que maximiza u optimiza el estado de carga.

Diseño conceptual del código de optimización:



## RESULTADOS

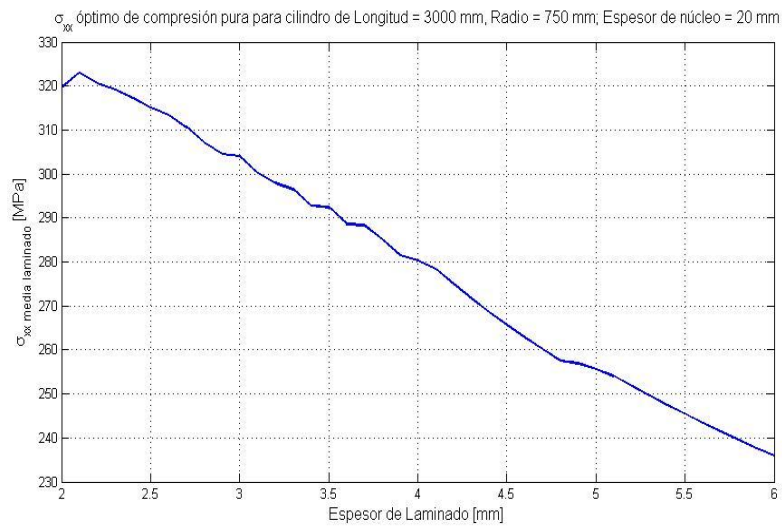
Para evaluar el modelo de optimización trabajamos teniendo en cuenta las propiedades mecánicas y geométricas definidas en las siguientes tablas y evaluando espesores de laminado de entre 2 y 6 mm.

**Tabla 1. Propiedades mecánicas de fibra de carbono embebida en matriz de resina epoxi.**

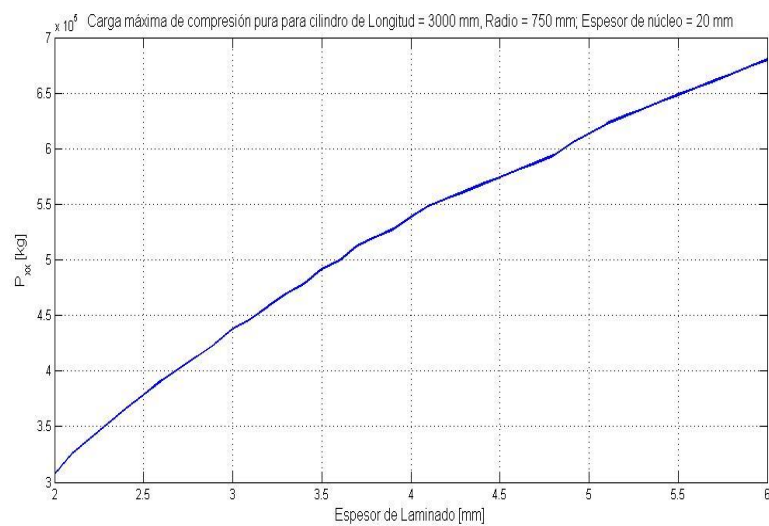
| E1 [MPa] | E2 [MPa] | G12 [MPa] | Nu12 [MPa] | F1T [MPa] | F2T [MPa] | F1C [MPa] | F2C [MPa] | F6 [MPa] |
|----------|----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 98260    | 6970     | 3650      | 0.3        | 1198      | 48        | 601       | 153       | 63       |

**Tabla 2. Propiedades mecánicas del núcleo.**

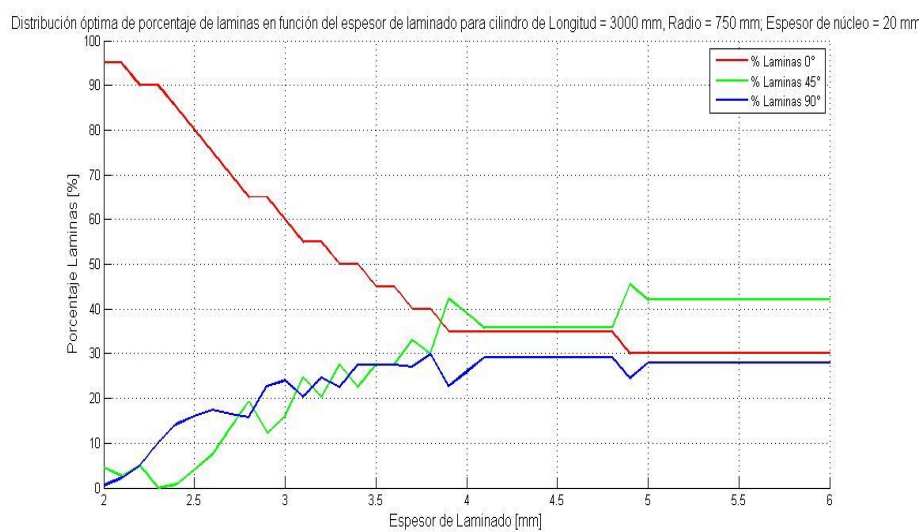
| E [MPa] | G12 [MPa] | Nu12 [MPa] | F1T [MPa] | F2T [MPa] | F1C [MPa] | F2C [MPa] | F6 [MPa] |
|---------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 97      | 38.5      | 0.26       | 1.6       | 1.6       | 1.1       | 1.1       | 1.1      |



**Figura 13. Curva de optimización - Espesor de laminado vs. Tensión media crítica.**



**Figura 14. Curva de optimización - Espesor de laminado vs. Carga [kg]**



**Figura 15. Curva de optimización - Espesor de laminado vs. Porcentaje óptimo.**



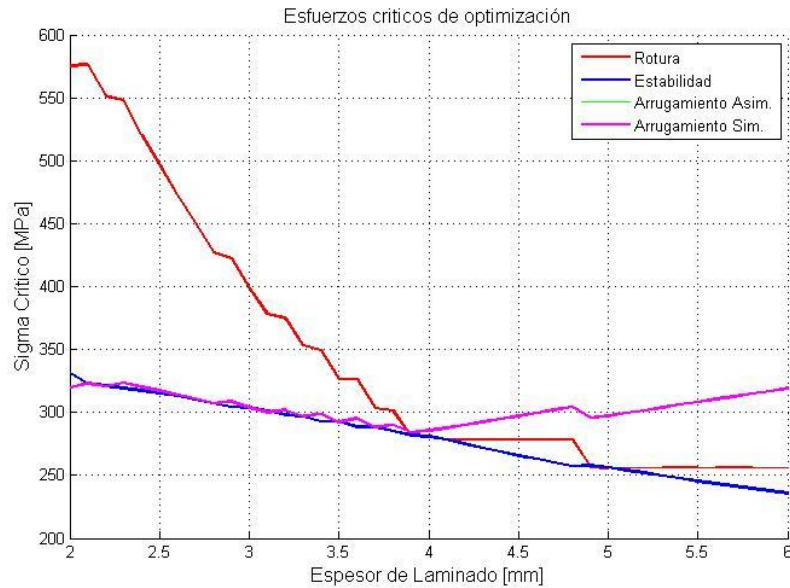


Figura 16. Curva de optimización - Tensiones críticas por modos.

## RESULTADOS ANALÍTICOS VS MODELOS FEM

Se contrastaron los resultados para la carga crítica de pandeo de placa del modelo analítico con modelos de elementos finitos como primer método de validación. Trabajando con los mismos materiales (definidos en las tablas 1 y 2) y dimensiones (Radio = 750 mm / Longitud = 3000 mm / Espesor de núcleo = 20 mm) se observaron los siguientes resultados:

Tabla 3. Comparación de resultados analíticos vs modelo FEM para esfuerzo crítico de pandeo.

| Esesor de lamina [mm] | Laminado          | Resultado analítico[N/mm] | Resultado FEM [N/mm] |
|-----------------------|-------------------|---------------------------|----------------------|
| 0,2                   | [45/-45/90/0/N]s  | 834,19                    | 834,85               |
| 0,2                   | [45/-45/0/0/N]s   | 825,85                    | 818,9                |
| 0,2                   | [0/0/0/N]s        | 497,17                    | 420                  |
| 0,2                   | [45/-45/0/0/0/N]s | 849                       | 847,16               |
| 0,2                   | [45/-45/45/-45]s  | 687                       | 672                  |
| 0,2                   | [0/0/90/90/N]s    | 806                       | 763                  |
| 0,2                   | [45/-45/90/90/N]s | 825,51                    | 783,18               |

## CONCLUSIONES

Los resultados de la programación son obtenidos en tiempos de trabajo sumamente cortos y proveen información acerca de cargas de rotura, pandeo de placa, modos de arrugamiento y fallas por crimping facilitando una envolvente de diseño que utilizamos como punto de partida para orientar los laminados. En cuanto a la validación por medio de modelos de elementos finitos las cargas de pandeo están contenidas en diferencias de a lo sumo un 15.5% para los casos analizados.

## REFERENCIAS

- [1] Mechanics of composites structures, 2003, Cambridge University, Estados Unidos.
- [2] Buckling of laminated composite plates and shells panels, 1985, NACA Report, Estados Unidos.
- [3]- [4] - [5] C. Kassapoglou, Design and analysis of composite structures, 2000, Estados Unidos.
- [6] Isaac M. Daniel, Engineering mechanics of composite materials, 2005, Estados Unidos.
- [7] NASA. "Buckling of thin-walled circular cylinders", NASA SP-8007, 1968, Estados Unidos.